

$$W = U_B - U_A \quad U_B = -eV_B \quad U_A = -eV_A$$

$$W = -eV_B - (-eV_A) = e(V_A - V_B) = e \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{L+3R}{\frac{3R}{2}} \right) \right]$$

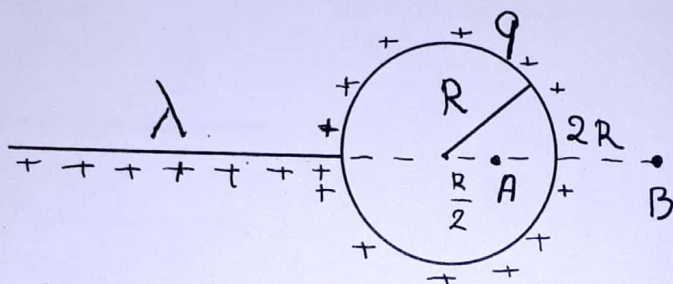
$$W = e \left[ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L+3R}{L+3R} \right] - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{L+3R}{3R} \right)$$

۱- بار الکتریکی مثبت  $q$  به طور یکنواخت روی سطح پوسته کروی نارسانا به شعاع  $R$  توزیع شده است. مطابق شکل زیر میله نازک نارسانایی به طول  $L$  که دارای بار الکتریکی با چگالی خطی مثبت  $\lambda$  است، در مقابل پوسته کروی قرار دارد.

الف) پتانسیل الکتریکی کل را (نسبت به مرجع بی نهایت) در نقطه  $A$  که در فاصله  $\frac{R}{2}$  از مرکز کره و در امتداد میله قرار دارد حساب کنید.

الف) پتانسیل الکتریکی کل را (نسبت به مرجع بی نهایت) در نقطه  $B$  که در فاصله  $2R$  از مرکز کره و در امتداد میله قرار دارد حساب کنید.

ج) کار لازم برای انتقال الکترونی با بار  $-e$  از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  را حساب کنید.



الف) ابتدا مسئله را

به دو قسمت می کنیم

۱- پتانسیل میله

۲- پتانسیل کره

۱- پتانسیل میله: از طریق انتگرال گیری

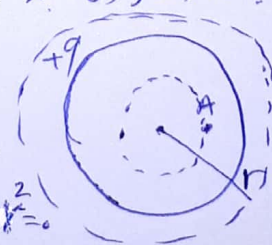
$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x} \quad dq = \lambda dx \quad V = \int_A^{L+3R/2} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{L+3R/2}{3R/2} \right) = V_1$$

۲- پتانسیل کره: با توجه به تقارن کروی ابتدا میله را حباب می کنیم سپس از مبدأ پتانسیل را

$$r > R \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enclosed}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r < R \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow E = 0$$



$$V_A = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int_{\infty}^R E dr - \int_R^{R/2} E dr$$

$$V_2 = V_A = - \int_{\infty}^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$V_A = V_1 + V_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L+3R/2}{3R/2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$V_B = \int_{3R}^{L+3R} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{L+3R}{3R} \right)$$

$$V_B = - \int_{\infty}^{2R} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{2R} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2R)}$$

$$V_B = ① + ② = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{L+3R}{3R} \right) + \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

جواب قسمت ج در بالای مسئله

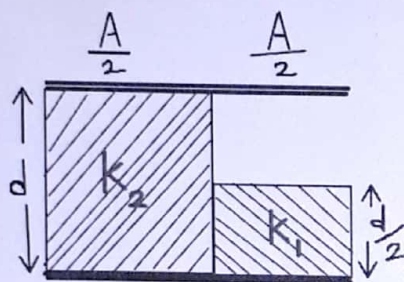
۲- خازن مسطحی به مساحت  $A$  و فاصله صفحات  $d$  به اختلاف پتانسیل  $V_0$  متصل می شود

و پس از پر شدن، خازن از باتری جدا می شود. الف) انرژی ذخیره شده در خازن را در این حالت بدست آورید.

حال مطابق شکل تیغه هایی با ضریب دی الکتریک  $K_1$ ، ضخامت  $d/2$  و مساحت  $A/2$  و ضریب دی الکتریک  $K_2$ ، ضخامت  $d$  و مساحت  $A/2$  در فضای بین صفحات خازن باردار شده قسمت الف وارد می شود.

ب) ظرفیت خازن پس از قرار گرفتن دی الکتریکها را بر حسب پارامترهای مساله بدست آورید.

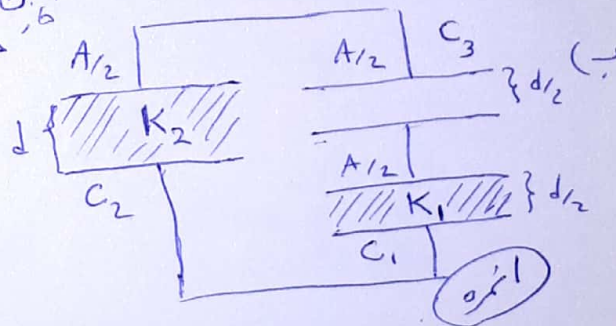
ج) انرژی ذخیره شده در خازن در وضعیت جدید چقدر است؟



الف)  $U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$   $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$U_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} V_0^2$  (انگزه)

ب) معادل



$C_1 = \frac{K_1 \epsilon_0 \frac{A}{2}}{d/2} = \frac{K_1 \epsilon_0 A}{d}$

$C_2 = \frac{K_2 \epsilon_0 \frac{A}{2}}{d} = \frac{K_2 \epsilon_0 A}{2d}$

$C_3 = \frac{\epsilon_0 \frac{A}{2}}{d/2} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}$

$C' =$  ظرفیت معادل  $C_1$  و  $C_3$  که سری هستند

$C' = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \frac{\frac{K_1 \epsilon_0 A}{d} \frac{\epsilon_0 A}{d}}{\frac{K_1 \epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d}} = \frac{K_1 \epsilon_0 A}{d(1+K_1)}$  (انگزه)

$C = C_2 + C'$   $C =$  ظرفیت معادل  $C_2$  و  $C'$  موازی هستند

$C = \frac{\epsilon_0 K_2 A}{2d} + \frac{K_1 \epsilon_0 A}{d(1+K_1)} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{K_2}{2} + \frac{K_1}{1+K_1} \right)$

ج) باتری به تیغه خازن از پلاکی جداست پس با پر شدن خازن با حضور دی الکتریک تغییر نمی کند

$q_0 = C_0 V_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} V_0$

$U = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{C_0^2 V_0^2}{C}$

$U = \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{\epsilon_0 A}{d} V_0 \right)^2}{\frac{\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{K_2}{2} + \frac{K_1}{1+K_1} \right)} = \frac{\epsilon_0 A V_0^2}{2d \left( \frac{K_2}{2} + \frac{K_1}{1+K_1} \right)}$  (انگزه)



$$U_{\text{ج}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\frac{2\pi\epsilon_0 K L}{\ln \frac{3}{2} + K \ln \frac{2b}{3a}}}$$

$$U_{\text{ج}} = \frac{q^2 (\ln \frac{3}{2} + K \ln \frac{2b}{3a})}{4\pi\epsilon_0 K L} \quad \text{ب) (مؤید)}$$

ادامه جواب قسمت (ج)

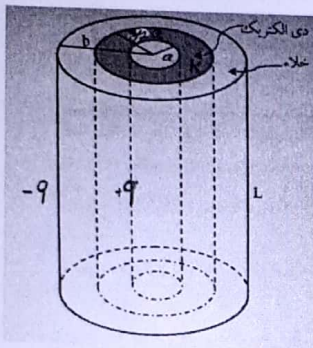
$$\frac{U_K}{U_{\text{ج}}} = \frac{\frac{q^2 \ln \frac{3}{2}}{4\pi\epsilon_0 K L}}{\frac{q^2 (\ln \frac{3}{2} + K \ln \frac{2b}{3a})}{4\pi\epsilon_0 K L}} = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln \frac{3}{2} + K \ln \frac{2b}{3a}}$$

۳- یک خازن استوانه ای دارای طول  $L$ ، شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$  است. طول  $L$  خیلی بزرگ است. صفحه داخلی دارای بار  $+q$  و صفحه خارجی دارای بار  $-q$  است. مطابق شکل زیر فضای بین دو صفحه خازن از شعاع  $a$  تا شعاع  $\frac{3a}{2}$  با ماده دی الکتریک  $K$  پر شده است و بقیه این فضا تا شعاع  $b$  فضای خالی است.

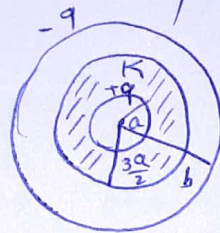
الف) اختلاف پتانسیل بین دو صفحه این خازن را حساب کنید.

ب) با استفاده از نتیجه قسمت الف، ظرفیت خازن را به دست آورید.

ج) نسبت انرژی الکتریکی ذخیره شده در داخل فضای دی الکتریک به کل انرژی الکتریکی خازن را حساب کنید.



الف) ابتدا میدان الکتریک را در نواحی  $a < r < \frac{3a}{2}$  و  $\frac{3a}{2} < r < b$  با استفاده از قانون گاوس حساب میکنیم.



سطح گاوسی کروی ای  $a < r < \frac{3a}{2}$  در داخل ماده دی الکتریک

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{K\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{q}{K\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K L r}$$

$$E(2\pi r L) = \frac{q}{K\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K L r}$$

انرژی (نسبت به کلون کروی)  $\frac{3a}{2} < r < b$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

$$E(2\pi r L) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^{\frac{3a}{2}} E dr - \int_{\frac{3a}{2}}^b E dr = - \int_a^{\frac{3a}{2}} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K L r} dr - \int_{\frac{3a}{2}}^b \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr$$

$$= - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K L} \ln r \Big|_a^{\frac{3a}{2}} - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln r \Big|_{\frac{3a}{2}}^b = - \frac{q}{2\pi K \epsilon_0 L} \ln \left( \frac{3a}{2a} \right) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \left( \frac{b}{\frac{3a}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow V_b - V_a = - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 K L} \ln \frac{3}{2} - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{2b}{3a} \quad V_b - V_a < 0 \quad \text{ب) (مؤید)}$$

$$C = \frac{q}{|V_b - V_a|} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\epsilon_0 K L} \ln \frac{3}{2} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{2b}{3a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 K L}{\ln \frac{3}{2} + K \ln \frac{2b}{3a}} \quad \text{ب) (مؤید)}$$

$$U_K = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_K}$$

$$C_K = \frac{2\pi\epsilon_0 K L}{\ln \frac{3}{2}} = \frac{2\pi\epsilon_0 K L}{\ln \frac{3}{2}}$$

ج) قسمت دی الکتریک کل خازن در نظر گرفته می شود

$$U_K = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\frac{2\pi\epsilon_0 K L}{\ln \frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow U_K = \frac{q^2 \ln \frac{3}{2}}{4\pi\epsilon_0 K L}$$

راه دوم از قانون مسابده انرژی است